VREAU SĂ ȘTIU

LITERA

Dorin Linț
Maranda Linț
Alina Carmen Birta
Sorin Doru Noaghi
Maria Zaharia

CLASA 8

Matematică

Exerciții • Probleme • Teste

Cuprins

4. ELEMENTE DE GEOMETRIE ÎN SPAȚIU

1 INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN $\mathbb{R}$

1.1. Mulțimi

A. BREVIAR TEORETIC

Mulțimi de numere

Mulțimea numerelor *naturale*: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

Mulțimea numerelor *întregi*: $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

Mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$

Reuniunea dintre mulțimea numerelor raționale și mulțimea numerelor iraționale este *mulțimea numerelor reale*, notată cu $\mathbb{R}$.

Relații între mulțimi

Două mulțimi care au aceleași elemente se numesc *mulțimi egale.*
Mulțimea A *este inclusă* în mulțimea B dacă orice element al mulțimii A este și element al mulțimii B. Scriem $A \subset B$. Mulțimea A se va numi *submulțime* sau *parte* a mulțimii B.
Propoziții:

1. *Mulțimea vidă* este submulțime a oricărei mulțimi:

$\varnothing \subset A$ oricare ar fi mulțimea A.

2. *Mulțimea* A este o submulțime a mulțimii A, oricare ar fi mulțimea A:

$A \subset A$ oricare ar fi mulțimea A.

3. Mulțimile A și B sunt egale dacă și numai dacă fiecare dintre ele este submulțime a celeilalte:

$A = B \Leftrightarrow A \subset B$ *și* $B \subset A$.

Operații cu mulțimi

1. *Reuniunea* mulțimilor A *și* B este mulțimea formată din elementele care aparțin cel puțin uneia dintre ele: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$.

2. *Intersecția* mulțimilor A *și* B este mulțimea formată din elementele comune celor două mulțimi: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$. Dacă $A \cap B = \varnothing$, atunci A și B se numesc mulțimi *disjuncte.*

3. *Diferența* mulțimilor A *și* B este mulțimea formată din elementele care aparțin mulțimii A *și* nu aparțin mulțimii B: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$.

B. ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

I. *Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.*

1 Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x \leq 18\}$ este:
A) $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$; **B)** $A = \{3, 4, 5, 6\}$;
C) $A = \{3, 4, 5\}$; **D)** $A = \{4, 5, 6\}$.

2 Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 21 \leq x^2 < 64\}$ este:
A) $B = \{5, 6, 7, 8\}$; **B)** $B = \{5, 6, 7\}$;
C) $B = \{4, 5, 6, 7\}$; **D)** $B = \{4, 5, 6\}$.

3 Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 37 < 2^x < 257\}$ este:
A) $C = \{5, 6, 7, 8\}$; **B)** $C = \{6, 7, 8, 9\}$;
C) $C = \{6, 7, 8\}$; **D)** $C = \{4, 5, 6\}$.

4 Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea $E = \{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid a \vdots 3 \text{ și } b \vdots 5\}$ este:
A) $E = \{30, 35, 60, 65, 90, 95\}$;
B) $E = \{30, 60, 90\}$;
C) $E = \{35, 65, 95\}$;
D) $E = \{15, 30, 35, 60, 65, 90, 95\}$.

5 Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea $A = \{0, 3, 6, 9, ..., 51\}$ este:
A) $A = \{3k \mid 0 \leq k \leq 17\}$;
B) $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N}\}$;
C) $A = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$;
D) $A = \{3k \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } k \leq 17\}$.

6 Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea $D = \{3x - 1 \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } 3 \leq x < 6\}$ este:
A) $D = \{8, 11, 14, 17\}$; **B)** $D = \{8, 11, 14\}$;
C) $D = \{11, 14, 17\}$; **D)** $D = \{3, 4, 5\}$.

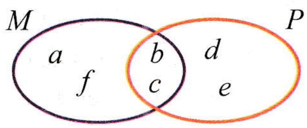
7 Scrisă prin enumerarea elementelor, mulțimea $F = \{\overline{ab} \in \mathbb{N} \mid a = 4b\}$ este:
A) $F = \{41, 64, 82\}$; **B)** $F = \{41, 84\}$;
C) $F = \{21, 48, 63, 84\}$; **D)** $F = \{41, 82\}$.

8 Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea $B = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ este:
A) $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 3\}$; **B)** $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \leq 3\}$;
C) $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| \geq 3\}$; **D)** $B = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| > 3\}$.

9 Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea $C = \{3, 9, 27, ..., 243\}$ este:
A) $C = \{3x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x \leq 5\}$;
B) $C = \{3^x \mid 0 < x \leq 5\}$;
C) $C = \{3^x \mid x \in \mathbb{N} \text{ și } x < 5\}$;
D) $C = \{3^x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 5\}$.

10 Scrisă prin proprietatea caracteristică elementelor sale, mulțimea $D = \{15, 17, 19, ..., 49\}$ este:
A) $D = \{2k + 1 \mid 7 \leq k \leq 24\}$;
B) $D = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } 7 \leq k \leq 24\}$;
C) $D = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } 8 \leq k \leq 24\}$;
D) $D = \{15 + 2k \mid k \in \mathbb{N} \text{ și } 0 \leq k \leq 17\}$.

11 Pentru mulțimile M și P, date în diagrama alăturată, completați cu simbolul ✔ în căsuța corespunzătoare valorii de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile următoare:



Propoziția	Adevărată	Falsă
p_1: $a \in M \cap P$		
p_3: $M \cap P = \{b, c\}$		
p_5: $\{e, f\} \subset M \cup P$		

Propoziția	Adevărată	Falsă
p_2: $b \notin M \cap P$		
p_4: $f \in M \setminus P$		
p_6: $\text{card}(P \setminus M) = 3$		

II. *Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.*

1 Între elementul a și mulțimea $M = \{a, d, e\}$ are loc relația $a \dots M$.

2 Între mulțimile $A = \{-1, 1\}$ și $B = \{-1, 0, 1, 2\}$ are loc relația $A \dots B$.

3 Dacă $M \cup N = M \cap N$, atunci mulțimile M și N sunt … .

4 Dacă $M \cap N = M$, atunci între mulțimile M și N are loc relația $M \dots N$.

5 Dacă orice element al mulțimii B este și element al mulțimii A, atunci B este … a mulțimii A.

6 Mulțimea $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 5\}$ are ... submulțimi nevide.

7 Dacă $M = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \dfrac{3}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}$ și $P = \left\{y \in \mathbb{N} \,\middle|\, \overline{1x3} \vdots 3\right\}$, atunci card $(M \cap P) = \dots$.

III. *Stabiliți asocierile corecte.*

1 Asociați numărului care identifică o mulțime din coloana **A**, litera care identifică rezultatul corespunzător, scris în coloana **B**.

A	B
1. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$	**a)** $\{0, 2, 4, 6\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ divide $6\}$	**b)** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $\{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 6$ și $x < 20\}$	**c)** $\{0, 2, 4\}$
4. $\{x \in \mathbb{N} \mid x<6$ și x este număr par$\}$	**d)** $\{1, 2, 3, 6\}$
	e) $\{0, 1, 2, 3, 6\}$
	f) $\{0, 6, 12, 18\}$

2 Se consideră mulțimile $M = \{-2, 0, 1, 3\}$ și $P = \{y \mid y = 2x^2 - 1, x \in M\}$. Asociați fiecărui număr, scris în coloana **A**, care identifică un element x, al mulțimii M, litera, scrisă în coloana **B**, care identifică elementul y al mulțimii P, corespunzător valorii x.

A	B	
1. –2	**a)** –1	**b)** 17
2. 0	**c)** 7	**d)** 1
3. 1	**e)** –0,5	**f)** – 2
4. 3		

IV. *Scrieți rezolvările complete.*

1 Se consideră mulțimile $A = \{-1, 2, 3\}$ și $B = \{-2, 0, 2\}$. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$; **c)** $A \setminus B$;
d) $B \setminus A$; **e)** $A \times B$; **f)** $B \times A$.

2 Se consideră mulțimea
$M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 11, 12, 17\}$. Scrieți, prin enumerarea elementelor, următoarele mulțimi:
$A = \{x \in M \mid x$ este număr prim$\}$;
$B = \{x \in M \mid x$ este divizor propriu al lui $10\}$;
$C = \{x \in M \mid x$ este număr impar$\}$;
$D = \{x \in M \mid x$ este divizor impropriu al lui $6\}$;

3 Scrieți următoarele mulțimi, precizând o proprietate caracteristică a elementelor.

a) mulțimea numerelor naturale impare, divizibile cu 5, mai mici decât 57;

b) mulțimea numerelor naturale, pătrate perfecte, cuprinse între 31 și 83;

c) mulțimea numerelor naturale, cuburi perfecte, cuprinse între 23 și 216;

d) mulțimea numerelor naturale de două cifre care dau restul 7 prin împărțire la 27.

4 Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:
p_1: $3 \in \{x \in \mathbb{N} \mid x > 2\}$; p_2: $\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}^* = \{0\}$;
p_3: $4 \notin \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 5\}$; p_4: $\{2, 3\} \subset \{1, 2, 5\}$;
p_5: $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x < 3\} \subset \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$;
p_6: $\varnothing \subset \{0\}$.

5 Pentru fiecare din situațiile următoare, determinați toate valorile lui x pentru care afirmația este adevărată.

a) $\{x\} \subset \{1, 3\}$ **b)** $\{1, 3, x\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$
c) $\{2, x, 3\} \subset \{1, 2, 3, 5\}$

6 Determinați elementele următoarelor mulțimi:

$A=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{12}{x}\in\mathbb{N}\right\}$;

$B=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{10}{x}\in\mathbb{Z}\right\}$;

$C=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{18}{2x-1}\in\mathbb{N}\right\}$;

$D=\left\{x\in\mathbb{N}\,\middle|\,\dfrac{18}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

$E=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{18}{2x-1}\in\mathbb{Z}\right\}$;

$F=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\dfrac{18}{2x-1}\in\mathbb{N}\right\}$.

7 Fie mulțimea

$$M=\left\{-2;1,(3);\sqrt{5};\frac{\sqrt{9}}{3};\sqrt{\frac{1}{4}};\frac{15}{3};\frac{\pi}{3};\frac{\sqrt{125}}{\sqrt{45}};0\right\}.$$

Scrieți elementele mulțimilor:

$A=\{x\in M\mid x\in\mathbb{N}\}$; $B=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Z}\}$;

$C=\{x\in M\mid x\in\mathbb{Q}\}$; $D=\{x\in M\mid x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\}$.

8 Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre propozițiile:

p_1: $-2\in\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 3\}$;

p_2: $\sqrt{3}\in\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x<2,(3)\}$;

p_3: $136\in\{x\mid x=n^2$ și $n\in\mathbb{N}\}$;

p_4: $324\notin\{x\mid x=n^2, n\in\mathbb{N}\}$;

p_5: $-\sqrt{5}\in\{x\in\mathbb{R}\mid -3<x<-2\}$;

p_6: $5\notin\{x\in\mathbb{N}\mid x=2k, k\in\mathbb{N}\}$.

9 Se consideră mulțimile: $A=\{0, 1, 2, 3\}$;

$X=\{x\mid x=5a-2$ și $a\in A\}$;

$Y=\{y\mid y=3^a$ și $a\in A\}$;

$Z=\{z\mid z=a^3$ și $a\in A\}$.

a) Scrieți mulțimile date, enumerând elementele acestora.

b) Calculați: $A\cup X$; $Y\cap Z$; $X\setminus Z$; $Z\setminus X$.

10 Se consideră mulțimile $A=\{3n+5\mid n\in\mathbb{N}\}$ și $B=\{2n+3\mid n\in\mathbb{N}\}$.

a) Scrieți trei elemente ale mulțimii A și trei elemente ale mulțimii B.

b) Demonstrați că $23\in A\cap B$.

11 Stabiliți dacă următoarele mulțimi sunt finite.

a) $M=\{x\in\mathbb{N}\mid x<1000\}$;

b) $N=\{x\in\mathbb{Z}\mid x<1000\}$;

c) $P=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<1000\}$;

d) $Q=\{x\in\mathbb{Z}\mid 3x-7\ge 11\}$;

e) $R=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\ge 1000\}$;

f) $S=\{x\in\mathbb{Z}\mid 3^x>1000\}$.

12 Se consideră mulțimile

$A=\left\{\dfrac{2n+1}{n+1}\mid n\in\mathbb{N}, n\le 5\right\}$ și

$B=\left\{\dfrac{n+1}{n}\mid n\in\mathbb{N}^*, n\le 5\right\}$.

a) Scrieți mulțimile A și B, enumerând elementele acestora.

b) Determinați cardinalul mulțimii A și cardinalul mulțimii B.

c) Calculați intersecția mulțimilor A și B.

13 Enumerați elementele, apoi determinați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile următoare.

a) $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|\le 3\}$;

b) $B=\{x\in\mathbb{Z}\mid |x|<4\}$;

c) $C=\left\{x\in\mathbb{N}\mid \dfrac{x}{4}\text{ este fracție subunitară}\right\}$;

d) $D=\left\{x\in\mathbb{N}\mid \dfrac{4}{x}\text{ este fracție supraunitară}\right\}$.

14 Știind că D_n reprezintă mulțimea divizorilor naturali ai numărului n, calculați:

a) $D_9\cup D_{12}$ **b)** $D_9\cap D_{12}$

c) $D_9\setminus D_{12}$ **d)** $D_{12}\setminus D_9$.

15 Știind că M_n reprezintă mulțimea multiplilor naturali ai numărului n, calculați:

a) $M_9\cap M_3$ **b)** $M_9\cap M_{12}$.

16 Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}\mid 3\le x<6\}$ și $B=\{x\in\mathbb{N}\mid 3<2x+1<9\}$.

a) Scrieți submulțimile mulțimii A.

b) Efectuați calculele: $A\cup B$; $A\cap B$; $A\setminus B$; $B\setminus A$; $A\times B$; $B\times A$.

17 Determinați elementele mulțimilor:

a) $A=\{x \mid \overline{32x} \vdots 2\}$; **b)** $B=\{x \mid \overline{1x5} \vdots 3\}$;

c) $C=\{x \mid \overline{74x} \vdots 5\}$; **d)** $D=\{x \mid \overline{36xx} \vdots 9\}$;

e) $E=\{x \mid \overline{472x} \vdots 6\}$; **f)** $F=\{x \mid \overline{568x} \vdots 4\}$.

18 Determinați cardinalul fiecăreia dintre mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 9 \leq x^2 < 75\}$;
$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq x^3 < 125\}$.

19 Se consideră mulțimile

$$A=\left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{x+7}{x+1} \in \mathbb{N}\right\},$$

$$B=\left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{x+6}{x} \in \mathbb{N}\right\} \text{ și}$$

$$C=\left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{x}{x-1} \in \mathbb{N}\right\}.$$

a) Scrieți mulțimile A, B și C, prin enumerarea elementelor.

b) Folosind rezultatele obținute la subpunctul a), calculați $A \cup B$; $B \setminus A$; $A \times C$; $C \times B$; $A \cap B \cap C$.

20 Se consideră mulțimea $M = \{a, b\}$. Scrieți:

a) două mulțimi, având intersecția egală cu mulțimea M;

b) trei mulțimi, având intersecția egală cu mulțimea M.

21 Determinați mulțimile A și B care îndeplinesc, simultan, condițiile:

a) $A \cap B = \{2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}\}$;

b) $A \cup B = \{-\sqrt{3}, 2\sqrt{3}, 3\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$;

c) $A \setminus B = \{\sqrt{2}\}$.

22 Se consideră mulțimea

$$A=\left\{-\sqrt{4};\ 0;\ -1;\ \frac{1}{2};\ 2;\ 3\right\}.$$

a) Scrieți, prin enumerarea elementelor, mulțimile: $A \cap \mathbb{N}^*$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \setminus \mathbb{Z}^*$, $A \setminus \mathbb{N}$.

b) Calculați $\mathbb{Z} \cap B$, unde $B = \{x \in A \mid x < 2\}$.

c) Pentru $C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 2\}$, calculați $A \setminus C$.

23 Fie mulțimile $M=\left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{5}{2x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și

$P = \{x \in \mathbb{Z} \mid |2x + 3| = 1\}$.

a) Arătați că -1 este element comun mulțimilor M și P.

b) Calculați suma elementelor mulțimii M.

c) Scrieți elementele mulțimii $M \times P$.

24 Determinați mulțimile A și B, știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$;

b) $A \cap B = \varnothing$;

c) Dacă $x \in A$, atunci $(x - 1) \in B$;

d) card $A > 2$.

C. TEST DE EVALUARE/AUTOEVALUARE

Subiectul I

Încercuiți răspunsul corect. Doar un răspuns este corect.

5 p. **1** Scrisă prin enumerarea elementelor sale, mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \leq 3^x \leq 243\}$ este:

A) $\{2, 3, 4\}$ **B)** $\{3, 4, 5\}$ **C)** $\{1, 2, 3, 4\}$ **D)** $\{2, 3, 4, 5\}$.

5 p. **2** Fie mulțimea $M=\{x \in \mathbb{N} \mid x = 2n+1, n \leq 25\}$. Cardinalul mulțimii M este:

A) 51 **B)** 26 **C)** 52 **D)** 25.

5 p. **3** Numărul tuturor submulțimilor mulțimii $M = \{-3; \sqrt{5}; 7\}$ este:

A) 3 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9.

5 p. **4** Suma numerelor raționale, elemente ale mulțimii $A = \left\{\frac{1}{3}; 0; \sqrt{4}; -\sqrt{\frac{1}{9}}; \sqrt{3}; -\sqrt{7}; -1\right\}$, este:

A) $2\frac{1}{3}$ **B)** 1 **C)** 0 **D)** $1\frac{1}{3}$.

5 p. **5** Pentru $A = \{-2, 1, 3\}$ și $B = \{1, 3, 7\}$, mulțimea $A \cup B$ este:

A) $\{-2, 1, 3\}$ **B)** $\{1, 3, 7\}$ **C)** $\{-2, 1, 3, 7\}$ **D)** $\{1, 3\}$.

5 p. **6** Dacă $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{a, b, d\}$, atunci mulțimea $A \cap B$ este:

A) $\{a, c\}$ **B)** $\{a, b\}$ **C)** $\{c, d\}$ **D)** $\{a, d\}$.

5 p. **7** Mulțimea A are 7 elemente, mulțimea B are 18 elemente, iar cardinalul mulțimii $A \cup B$ este 20. Atunci, numărul elementelor mulțimii $A \cap B$ este:

A) 7 **B)** 18 **C)** 5 **D)** 25.

5 p. **8** Dacă $A = \{-2, 1, 3, 4\}$, $B = \{-2, 5, a\}$ și $A \cap B = \{-2, 3\}$, atunci valoarea numărului real a este:

A) 4 **B)** 1 **C)** 5 **D)** 3.

Subiectul al II-lea

Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.

5 p. **1** Dacă $x \in \mathbb{N}$ și $3x - 1 \in \{-7, 2, 8\}$, atunci $x \in \{..........\}$.

5 p. **2** Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x$ este restul împărțirii unui număr natural la $5\}$ sunt: ... .

5 p. **3** Dacă $A = \left\{x \in \mathbb{N} \,\middle|\, \frac{2x-1}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$ și $B = \left\{x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-1}{x+1} \in \mathbb{Z}\right\}$, atunci $B \setminus A = \{...\}$.

5 p. **4** Mulțimea $B = \{23, 24, 25, ..., 137\}$ conține ... multipli ai numărului 3.

Subiectul al III-lea

Scrieți rezolvările complete.

1 Se consideră mulțimile

$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x = n + n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = 2n + 1, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$.

5 p. **a)** Aflați mulțimile A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

5 p. **b)** Deduceți că mulțimile A și B sunt disjuncte.

2 Fie mulțimile $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| = 1\}$ și $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \leq 2{,}5$ și $|2 - x| < 3\}$.

5 p. **a)** Scrieți mulțimile C și D, enumerând elementele acestora.

5 p. **b)** Determinați mulțimea $C \times D$.

3 Se consideră mulțimile $E = \{1, 5, 9, 13, 17, ...\}$, $F = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$.

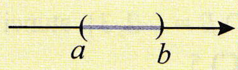
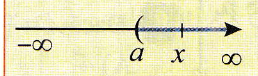
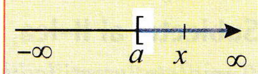
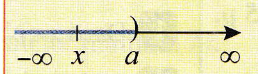
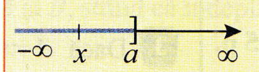
5 p. **a)** Scrieți mulțimea E cu ajutorul unei proprietăți comune a elementelor acesteia.

5 p. **b)** Calculați suma elementelor mulțimii $E \cap F$, care au cel mult două cifre.

1.2. Intervale de numere reale

A. BREVIAR TEORETIC

Axa numerelor este o dreaptă d oarecare, pe care stabilim *sensul pozitiv*, *originea* şi *unitatea de măsură*. Fiecărui punct de pe această dreaptă îi corespunde un număr real şi fiecărui număr real îi corespunde un punct pe dreapta d. În acest fel, dreapta d se identifică cu mulţimea numerelor reale şi vom spune că *dreapta d este reprezentarea geometrică a mulţimii numerelor reale.*

INTERVALE MĂRGINITE		INTERVALE NEMĂRGINITE	
Intervalul	Reprezentarea geometrică	Intervalul	Reprezentarea geometrică
interval deschis (a, b) $(a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $a < x < b\}$		Interval deschis nemărginit la dreapta (a, ∞) $(a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $x > a\}$	
interval închis $[a, b]$ $[a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $a \le x \le b\}$		Interval închis la stânga, nemărginit la dreapta $[a, \infty)$ $[a, \infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $x \ge a\}$	
interval semideschis $(a, b]$ $(a, b] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $a < x \le b$		interval deschis, nemărginit la stânga $(-\infty, a)$ $(-\infty, a) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $x < a\}$	
interval semideschis $[a, b)$ $[a, b) = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $a \le x < b\}$		interval închis la dreapta, nemărginit la stânga $(-\infty, a]$ $(-\infty, a] = \{x \mid x \in \mathbb{R}$ şi $x \le a\}$	
Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalenţele: 1) $x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x \rvert < a \Leftrightarrow x \in (-a, a)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x \rvert \le a \Leftrightarrow x \in [-a, a]$		Oricare ar fi $a > 0$, au loc echivalenţele: 1) $x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x \rvert > a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a)$ sau $x \in (a, \infty)$ 2) $x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x \rvert \ge a \Leftrightarrow x \in (-\infty, -a]$ sau $x \in [a, \infty)$	

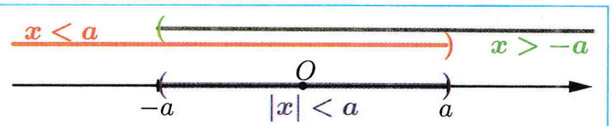
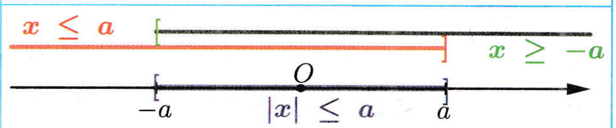
Operaţii cu intervale de numere reale

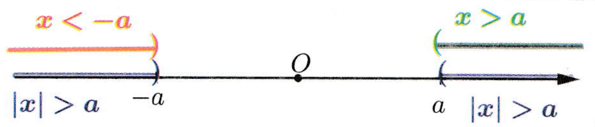
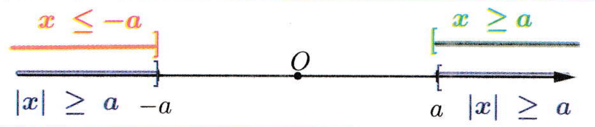
Intervalele de numere reale sunt submulţimi ale mulţimii numerelor reale. În consecinţă, între intervale de numere reale se definesc aceleaşi operaţii ca între mulţimi.

Reprezentarea pe axă a intervalelor este foarte utilă pentru efectuarea operaţiilor.

Exemple:

Oricare ar fi numărul real $a > 0$, au loc egalităţile:

1. $\{x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x \rvert < a\} = (-\infty; a) \cap (-a, \infty) = (-a; a)$	
2. $\{x \in \mathbb{R}$ şi $\lvert x \rvert \le a\} = (-\infty; a] \cap [-a, \infty) = [-a, a]$	

3. $\{x \in \mathbb{R}$ şi $\mid x \mid > a\} = (-\infty, -a) \cup (a, \infty)$	
4. $\{x \in \mathbb{R}$ şi $\mid x \mid \geq a\} = (-\infty; -a\,] \cup [\,a, \infty)$	

Observații: 1. $\{x \in \mathbb{R}$ şi $\mid x \mid \geq 0\} = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

2. Reuniunea, intersecția, diferența a două intervale nu au ca rezultat neapărat un interval.

B. ACTIVITĂȚI DE ÎNVĂȚARE

I. *Stabiliți varianta corectă de răspuns. Numai un răspuns este corect.*

1 Cel mai mic număr întreg care aparține intervalului $I = (-5, 3]$ este:

A) 3; **B)** –5; **C)** –4; **D)** –5.

2 Cel mai mic număr întreg care nu aparține intervalului $I = \left(-\infty, \frac{11}{3}\right]$ este:

A) – 1; **B)** 0; **C)** 3; **D)** 4.

3 Cel mai mare număr întreg care aparține intervalului $I = \left[-5, -\frac{5}{2}\right)$ este:

A) –2; **B)** – 3; **C)** 0; **D)** 1.

4 Cel mai mare număr întreg care nu aparține intervalului $I = \left[-2\sqrt{3}, +\infty\right)$ este:

A) 0; **B)** –3; **C)** –2; **D)** –4.

5 Mulțimea $M = \{x \in \mathbb{R} \mid |x + 1| \leq 3\}$, scrisă sub formă de interval, este:

A) $[-3, 3]$; **B)** $[-4, 2]$; **C)** $[-4, 2)$; **D)** $(-4, 2]$.

6 Intervalul $I = \left(0; \frac{1}{3}\right)$, scris ca mulțime definită prin proprietatea comună a elementelor sale, este:

A) $I = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 0 \leq x < \frac{1}{3}\right\}$;

B) $I = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| 0 < x \leq \frac{1}{3}\right\}$;

C) $I = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left|2x - \frac{1}{3}\right| \leq \frac{1}{3}\right\}$;

D) $I = \{x \in \mathbb{R} \mid |2x - 0,(3)| < 0,(3)\}$.

7 Scrisă sub formă de interval, mulțimea

$A = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -2 \leq \frac{x-3}{2} < 3\right\}$ este:

A) $[-1, 9)$; **B)** $[-4, 6)$;
C) $[-2, 3)$; **D)** $[-7, 3)$.

8 Mulțimea $B = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| -\frac{x}{3} > -\frac{\sqrt{2}}{6}\right\}$ se scrie sub formă de interval, astfel:

A) $(-\infty, \sqrt{2})$; **B)** $\left(-\infty, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

C) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$; **D)** $\left(-3, -\frac{\sqrt{2}}{6}\right)$.

9 Cardinalul mulțimii $C = \{x \in \mathbb{Z}^* \mid |x| < 5\}$ este:

A) 5; **B)** 10;
C) 8; **D)** 9.

10 Numerele întregi a și b pentru care $(a, b) \cap \mathbb{N} = \{5\}$ sunt:

A) $a = 5$; $b = 6$; **B)** $a = b = 5$;
C) $a = 4$; $b = 5$; **D)** $a = 4$; $b = 6$.

11 Completați **A**, dacă propoziția este adevărată sau **F**, dacă propoziția este falsă.

Propoziția		*Propoziția*	
p_1: $2 \in (-\infty, 2)$		p_2: $5 \notin (-5, 5)$	
p_3: $-0,(3) \in (-1, 1]$		p_4: $\sqrt{3} \in (-\infty, 2)$	
p_5: $(2, 3) \subset [2, 3]$		p_6: $\mathbb{Z} \subset (-\infty, \infty)$	

II. *Completați spațiile libere astfel încât să obțineți afirmații adevărate.*

1 Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} | x - 2 \geq 3\}$ este … .

2 Dacă $A = (-\infty, 1]$ și $B = (-2, 5)$, atunci:

a) $A \cup B = \ldots$; **b)** $A \cap B = \ldots$;
c) $A \setminus B = \ldots$; **d)** $B \setminus A = \ldots$.

3 Un exemplu de interval care:

a) conține numărul $\sqrt{3}$ este …;
b) nu conține numere întregi este …;
c) conține exact două numere întregi nenegative este …;
d) conține exact un număr natural este … .

4 Scrisă sub formă de interval mulțimea:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | |x| = x\}$ este...;
b) $B = \{x \in \mathbb{R} | |x| = -x\}$ este ...;
c) $C = \{x \in \mathbb{R} | |x| \leq 3\}$ este...;
d) $D = \{x \in \mathbb{R} | [x] = 1\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului x, este … .

5 Se consideră intervalul $I = [-3, 4]$.

a) Un număr natural care aparține intervalului I este … .
b) Un număr întreg care nu este natural și aparține intervalului I este … .
c) Un număr rațional care nu este întreg și aparține intervalului I este … .
d) Un număr irațional negativ care aparține intervalului I este … .

6 **a)** Suma numerelor întregi conținute în intervalul $(-3, 4)$ este … .
b) Suma numerelor naturale conținute în intervalul $(-3, 4)$ este … .

7 Scrisă sub formă de interval sau reuniune de intervale disjuncte, mulțimea:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x - 2 \leq 0\}$ este … .
b) $B = \{x \in \mathbb{R} | |3x + 5| \leq 4\}$ este … .
c) $C = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \left|\frac{x-2}{3}\right| \leq 2\right\}$ este … .
d) $D = \left\{x \in \mathbb{R} \middle| \sqrt{x^2 + 3x + 9} \geq 3\right\}$ este … .

III. *Stabiliți asocierile corecte.*

1 Se consideră mulțimile $M = \{x \in \mathbb{R} | |x| < 3\}$ și $P = \{x \in \mathbb{R} | |x| \geq 2\}$.
Asociați numărului care identifică o mulțime din coloana **A**, litera care identifică rezultatul corespunzător, scris în coloana **B**.

A	*B*
	a) $(-\infty, -3] \cup [3, \infty)$
1. $M \cup P$	**b)** $(-2, 2)$
2. $M \cap P$	**c)** $[-3, 3]$
3. $M \setminus P$	**d)** $(-3, -2] \cup [2, 3)$
4. $P \setminus M$	**e)** $\varnothing$
	f) $\mathbb{R}$

2 Se consideră mulțimile $M = (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ și $P = (-\infty, -1] \cup [0, \infty)$.
Asociați numărului care identifică o mulțime din coloana **A**, litera care identifică rezultatul corespunzător, scris în coloana **B**.

A	*B*
	a) $(0, 1)$
1. $M \cup P$	**b)** $\mathbb{R}$
2. $M \cap P$	**c)** $(-\infty, -1] \cup [1, \infty) \cup \{0\}$
3. $M \setminus P$	**d)** $(-1, 0)$
4. $P \setminus M$	**e)** $(-1, 1)$
	f) $\{-1, 0, 1\}$

IV. *Scrieți rezolvările complete.*

1 Reprezentați pe axa numerelor mulțimile:

$A = \{-3, 2\}$;
$B = \{x \in \mathbb{Z} | -2 \leq x < 3\}$;
$C = \{x \in \mathbb{R} | -1 \leq x \leq 3\}$;
$D = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -2\}$;
$E = \{x \in \mathbb{R} | |x| < 2\}$;
$F = \{x \in \mathbb{R} | |x| \geq 2\}$;
$G = \{-2, 0, 1\}$;
$H = \{x \in (-3, 2] | x < 3\}$;
$I = \{x \in \mathbb{R} | x \leq -1$ sau $x > 2\}$;
$J = \{x \in \mathbb{R} | x < 2$ sau $x \geq -1\}$.

2 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $2 \in (-3, 2)$; **b)** $-2 \in [-4, -3]$;

c) $-\pi \in (-4, -3)$; **d)** $3 \in [-1, 3]$;

e) $-\frac{1}{2} \in (-1, \infty)$; **f)** $\sqrt{10} \notin [3, \infty)$.

3 Stabiliți argumentat care dintre următoarele mulțimi reprezintă intervale de numere reale.

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 1\}$;

$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 3\}$;

$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$;

$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -3\}$;

$E = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 2\}$;

$F = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 2\}$;

$G = \{-2, -1, 0\}$;

$H = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 2\}$;

$I = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -2 \text{ și } x < 3\}$.

4 Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

p_1: $(-\infty, -1] \subset (-\infty, -2]$

p_2: $(-\infty, -1] \subset (-\infty, -1)$

p_3: $[0, \infty) \subset \mathbb{N}$

p_4: $(1, 2) \subset [1, 2)$

p_5: $(-2, \sqrt{3}) \subset [0, \infty)$

p_6: $\{-2, 1\} \subset (-1, 2)$

p_7: $\sqrt{3} \in [-3, 1)$

p_8: $-\sqrt{3} \in [-2, -1]$

p_9: Există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $[a, b] \subset \mathbb{Z}$.

p_{10}: Există $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq b$, astfel încât $[a, b] \subset \mathbb{Q}$.

p_{11}: Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, cu $a < b$ și $x \in [b, \infty)$, atunci $x \in [a, \infty)$.

5 Se consideră mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -3 < x \leq 2\}$ și $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, -1 < x < 4\}$.

a) Scrieți mulțimile A și B sub formă de interval.

b) Calculați: $A \cup B, A \setminus B, A \cap B, A \cap \mathbb{Z}, B \cap \mathbb{N}$.

6 Determinați cel mai mare număr întreg x pentru care $\mathbb{N} \subset (x, \infty)$.

7 Determinați:

a) $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{3\}$.

b) $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{3\}$.

c) $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{3\}$.

d) $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(a, b) \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$.

e) $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $[a, b] \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0\}$.

8 Se consideră intervalul $I = [-3, 2)$. Calculați:

a) $I \cap \mathbb{Z}$; **b)** $I \setminus \mathbb{Z}$;

c) $I \cap \mathbb{N}$; **d)** $I \setminus \mathbb{N}$.

9 Se consideră mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt{2}\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 2\}$. Calculați:

a) $A \cup B$; **b)** $A \cap B$;

c) $A \setminus B$; **d)** $B \setminus A$.

10 Aflați $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \cup \mathbb{N}, A \cap \mathbb{Z}, B \cap \mathbb{N}, B \cap \mathbb{Z}$, pentru fiecare dintre situațiile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R}, |x| < 2\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R}, |x - 1| > 4\}$;

b) $A = \{x \in \mathbb{R}, -2 < x \leq 4\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R}, -1 \leq x < 3\}$;

c) $A = \{x \in \mathbb{R}, |3x + 5| < 11\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R}, |2x + 3| \leq 1\}$;

d) $A = \{x \in \mathbb{R}, |4x - 1| < 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R}, |3x + 2| \leq -1\}$;

e) $A = \{x \in \mathbb{R}, |3x - 1| < -5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R}, -3 \leq x < 4\}$;

f) $A = \{x \in \mathbb{R}, |x| \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{R}, |x| > 3\}$;

g) $A = \{x \in \mathbb{R}, |2x - 1| \leq 5\}$ și $B = [-3; 0) \cap (1; 4]$.

11 Dacă $A = [-3; 4)$ și $B = (-1; 5)$ aflați: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \cap \mathbb{N}, B \cap \mathbb{Z}$.

12 Dacă $A = [-4; 3)$ și $B = (-2; 4)$ aflați $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A, A \cap \mathbb{N}, B \cap \mathbb{Z}$.

13 Găsiți câte două exemple de:

a) numere întregi cuprinse între -3 și 3;

b) numere raționale care nu sunt întregi și sunt cuprinse între -3 și 3;

c) numere întregi care nu sunt naturale și sunt cuprinse între -3 și 3.

14 **a)** Reprezentați pe axa numerelor mulțimea numerelor reale cuprinse între -3 și 3.

b) Numiți figura geometrică obținută la subpunctul a).

15 Se consideră intervalul $I = [-1, 2]$.

a) Determinați cardinalul mulțimii $I \cap \mathbb{Z}$.

b) Determinați cardinalul mulțimii $I \cap \mathbb{N}$.

c) Decideți dacă intervalul I conține un număr finit de numere reale.